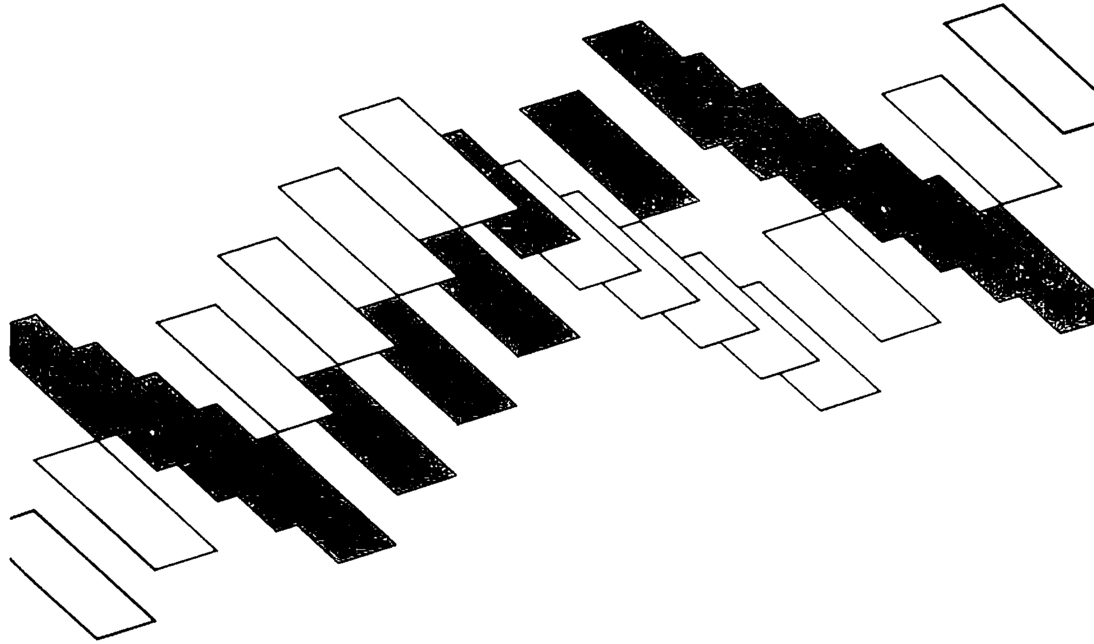
偏微分方程式

科学者・技術者のための使い方と解き方

スタンリー・ファーロウ 著
伊理正夫・伊理由美 訳



ワイリー・ジャパン

第5課　変　数　分　離

目的：　変数分離という強力な方法を導入し，よく知られた拡散の問題を解くのにこの方法がどのように使えるかを示すこと．代数的に複雑な性質をもっているためこの方法がよく理解できない学生もいるので，直観的な説明を随所に交えることにする．

変数分離の基本的な考え方は，問題の初期条件を簡単な成分に分解し，その各成分に対する応答を求め，そして，それらの応答を加え合わせるということである．これで任意の初期条件に対する応答を得ることができる．

変数分離の実際の手順の中にはこの基本的な考え方があまりよく見えないかもしれないが，この考え方が変数分離法の基本になっていることには変わりはない．

変数分離は初期値・境界値問題を解く技法の中で最も古くからあるものの一つであって，次の形の問題に適用される：

1. 偏微分方程式が線形で同次である（必ずしも定数係数でなくてよい）．
2. 境界条件の形が

$$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=0$$
$$\gamma u_x(1,t)+\delta u(1,t)=0$$

である（この形の境界条件を**線形同次境界条件**と呼ぶ）．α，β，γ，δ は定数である．

この方法は Joseph Fourier の時代にまで遡る（実際，変数分離法のことを Fourier の方法と呼ぶこともある）．恐らく最も広く使われている解法（もちろんこれが適用できるような場合）であろう．

この方法の一般論を展開する代りに，一つの適用例を示そう（後でもっと一般的に話をすることにする）．次の初期値・境界値問題（拡散問題）を考えよう：

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$　$(0\leqq x\leqq 1)$

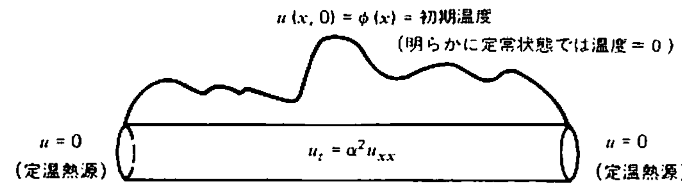


図 5.1　拡　散　問　題

変数分離を行う前に，まず，問題そのもののことを考えてみよう．ここでは両端の温度が零に固定されている有限長の棒があるとしている．この問題に対して，初期条件という形のデータも与えられている．われわれの目標はそれから後の時点における温度 $u(x,t)$ を求めることである．

ここで，方法そのものの話に入ることになるが，まず，その概略を述べよう．

変数分離法の概略

変数分離法では，$X(x)$ を x の関数，$T(t)$ を t の関数として，

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

という単純な形をした解を探すことから始める．この形の温度 $u(x,t)$ は，t のどんな値に対してもその基本的な“形状”を保持するから，この解は単純なのである（図 5.2）．偏微分方程式に対してこのような形の解を無限個（それらは同時に境界条件をも満足する）求めることが可能である．これらの単純な関数 $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$（基本解と呼ぶ）は問題の基本的な構成要素であり，われわれが求めている解 $u(x,t)$ は，和

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)T_n(t)$$

が初期条件を満足するように，単純な基本解 $X_n(x)T_n(t)$ を加え合わせることによって得られる．この和もまた偏微分方程式と境界条件とを満足するから，問題に対する解が得られたことになる．もっと詳細にこのことを述べよう．

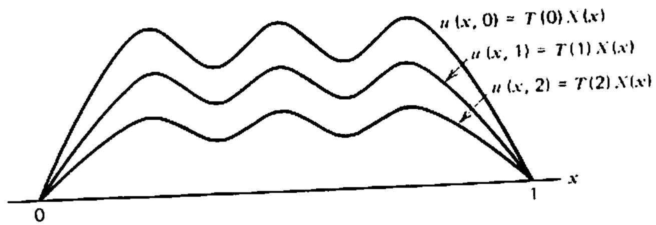


図 5.2 t のいろいろな値に対する $X(x)T(t)$ のグラフ

変数分離

〈ステップ 1〉（偏微分方程式の基本解を求めること）

次の 4 条件を満足する関数 $u(x,t)$ を求めたい：

偏微分方程式 $u_t=\alpha^2u_{xx}$ $(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}$ $(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=\phi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

まず偏微分方程式に $X(x)T(t)$ を代入して $X(x)T(t)$ について解き $u(x,t)=X(x)T(t)$ という形の解を探す．代入により

$$X(x)T'(t)=\alpha^2X''(x)T(t)$$

が得られる．ここで，変数分離法の一番肝心な部分に入る．この式の両辺を $\alpha^2X(x)T(t)$ で割ると，

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

が得られて，変数が分離されたことになる．すなわち，この式の左辺は t だけに関係し右辺は x だけに関係する．x と t は互に独立であるから，両辺はある定った定数（たとえば k）でなければならない．したがって

$$\frac{T'}{\alpha^2T}=\frac{X''}{X}=k$$

と書ける．すなわち，

$$T'-k\alpha^2T=0$$
$$X''-kX=0$$

である．そこで，これら二つの常微分方程式をそれぞれに解き，それらを掛け合わせれば偏微分方程式の解が得られる．（ここでやったことの本質は，2階の偏微分方程式を二つの常微分方程式に変えたことであるということに注意せよ．）しかるに，ここで一つ重要なことに注意しなければならない．すなわち，分離定数 k は負であってほしい（そうでないと，$t\to\infty$ のときに $T(t)$ が 0 にならない）．こうするために，普通 $k=-\lambda^2$ とおく（$\lambda\neq0$；こうすれば $k=-\lambda^2$ は負であることが保証される）．新しい分離定数 λ を使うと，二つの常微分方程式は

$$T'+\lambda^2\alpha^2T=0$$
$$X''+\lambda^2X=0$$

のように書ける．これらを解こう．両者とも標準的な形の常微分方程式であるから，解は直ちに

$$T(t)=Ce^{-\lambda^2\alpha^2t}\quad (C\text{ は任意の定数})$$
$$X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)\quad (A,B\text{ は任意の定数})$$

であることがわかり，したがってすべての関数

$$u(x,t)=e^{-\lambda^2\alpha^2t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)]$$

が偏微分方程式 $u_t=\alpha^2u_{xx}$ を満足する（A,B,λ は任意；$T(t)=Ce^{-\lambda^2\alpha^2t}$ の任意の定数 C は積 $X(x)T(t)$ を作るときに $X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)$ の任意定数 A，B の中に繰り入れてしまうことができる）．この事実を確かめることがこの課の練習問題 1 である．ここまでで，偏微分方程式を満たす無限個の関数が得られたことになる．

〈ステップ 2〉（境界条件を満たす偏微分方程式の解を求めること）

ここまでで，偏微分方程式のたくさんの解を作り出すことができたが，それらの解のすべてが境界条件と初期条件を満足しているわけではない．次のステップは，今得られている解の集団

$$e^{-\lambda^2\alpha^2t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)] \tag{5.1}$$

の中から境界条件

$$u(0,t)=0$$
$$u(1,t)=0$$

を満足するような部分集合を選ぶことである．このために，解 (5.1) をこれらの境界条件に代入すると，

$$u(0,t)=Be^{-\lambda^2\alpha^2t}=0 \quad\Rightarrow B=0$$
$$u(1,t)=Ae^{-\lambda^2\alpha^2t}\sin\lambda=0\Rightarrow \sin\lambda=0$$

が得られる．第２の境界条件から，今まで任意の定数（$\neq 0$）としていた分離定数 λ に制限が加えられることになる．λ は方程式 $\sin\lambda=0$ の根でなければならない．すなわち，$u(1,t)=0$ であるためには

$$\lambda=\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\cdots$$

あるいは，

$$\lambda_n=\pm n\pi \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と選ぶ必要がある．第２の境界条件だけを見ると $A=0$ でもよいように見えるが，そうすると，(5.1) の解が 0 になってしまうので，そうおくわけにはいかない．

これで第２ステップは終わった．ここまでで，偏微分方程式と境界条件の両方を満足する無限個の関数

(5.2)★　$$u_n(x,t)=A_ne^{-(n\pi\alpha)^2t}\sin(n\pi x) \quad (n=1,2,\cdots)$$

が得られたことになる*．これらの関数が解の構成要素をなし，求める解はこれら単純な関数の和として表せることになる．どのように和を作るかは初期条件による．これらの基本解 $u_n(x,t)$ のグラフを図 5.3 に示す．

〈ステップ 3〉（境界条件と初期条件のすべてを満たす偏微分方程式の解を求めること）

最後の，そして恐らく数学的観点からすると最も興味あるステップは，初期条件

$$u(x,0)=\phi(x)$$

を満足するように係数 A_n を選んで基本解の和

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-(n\pi\alpha)^2t}\sin(n\pi x)$$

を作ることである．この和を初期条件に代入すると

(5.3)　$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)$$

が得られる．この式から係数 A_n を定めるという問題は，実はフランスの数学者 Joseph Fourier が提起した興味ある問題——初期温度分布 $\phi(x)$ を次のような基本解の和として展開することができるかという問題——である：

$$A_1\sin(\pi x)+A_2\sin(2\pi x)+A_3\sin(3\pi x)+\cdots$$

$\phi(x)$ が十分すなおな関数であるならば，たとえば連続で有界変動であるなら

* 関数 u_n と u_{-n} とは符号を除いて本質的には同じものであるので，$n<0$ の方は除いた．

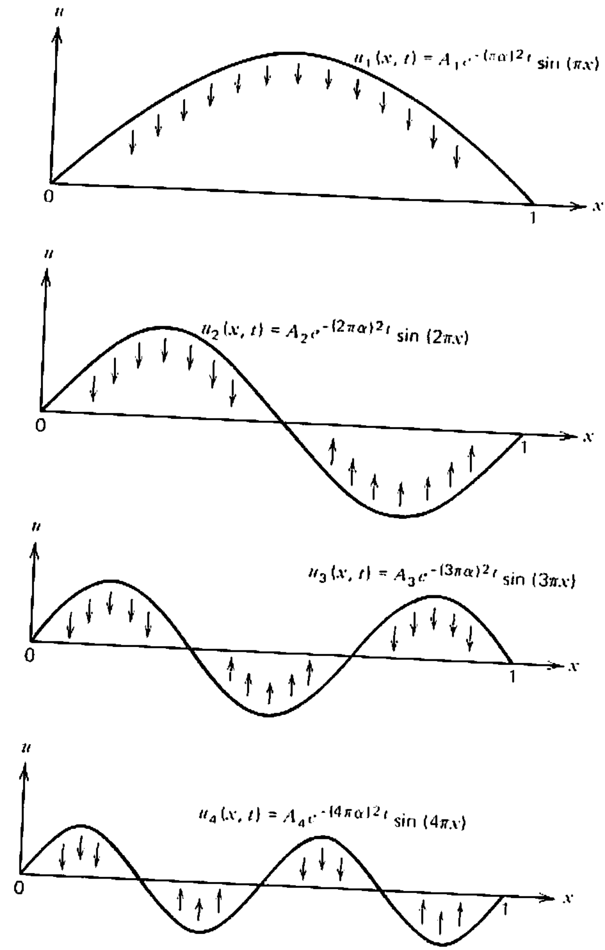


図 5.3　基本解 $u_n(x,t)=A_ne^{-(n\pi\alpha)^2t}\sin(n\pi x)$

ば，この問題の答えは“イエス”である．したがって，問題は係数 A_n をどうやって求めるかということになる．

これは実際には非常に簡単である．すなわち，関数族（関数の集合）

$$\{\sin(n\pi x)\ ;\ n=1,2,\cdots\}$$

の直交性という性質を使う．これらの関数は

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{1}{2} & (m = n) \end{cases}$$

という意味で互いに直交していることがわかる（練習問題2参照）．この性質は関数のグラフを描いて眺めてみればわかる（図 5.4）．

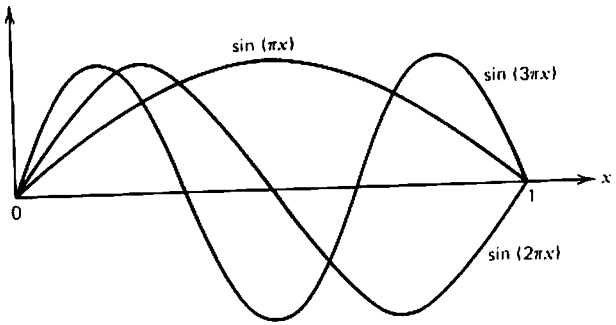


図 5.4 直交関数列

さていよいよ展開式

$$\phi(x) = A_1\sin(\pi x) + A_2\sin(2\pi x) + A_3\sin(3\pi x) + A_4\sin(4\pi x) + \cdots$$

の係数を求めることにする．この式の両辺に $\sin(m\pi x)$（m は任意の整数）を掛けて，0から1まで積分すると，直交性のためにほとんどの項が消えて，

$$\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx = A_m\int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx = \frac{1}{2}A_m$$

が得られる．A_m について解けば

$$A_m = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx$$

となる．これで，求める解が

(5.4)★ $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$$

と表され，その中の係数 A_n は

(5.5)★ $$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx$$

によって与えられることがわかった．この答えがこの問題の最初の4条件全部を満たしていることを調べて確認することができる．これでステップ3を終了

する．

得られた解がこんなに複雑な形をしているのを見て，学生の多くはがっかりして解を2度と眺めようとしない（残念なことであるが）．ゆっくり時間をかけてこの解を分析してみるならば，そんなに難しいものではない．実際，解が複雑であればあるほど，そこに含まれている情報の量も多いのである．この解の意味を知る助けとなるような二三の注意を次に挙げる．

注意

1. $\phi(x)$ の Fourier 正弦展開 (5.3) と解 (5.4) との違いは，時間の因子

$$e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$$

が各項に掛かっているかどうかだけである．したがって，もし初期条件が

$$\phi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$$

というような簡単な形をしているならば，解は単に

$$u(x,t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\sin(3\pi x)$$

となるだけである．この場合，$\phi(x)$ を Fourier 正弦級数に展開すると，

$$A_1 = 1$$
$$A_2 = 0$$
$$A_3 = \frac{1}{2}$$
$$A_4 = A_5 = \cdots = 0$$

が得られる．

2. 解 (5.4) は次のように解釈できる：初期温度 $\phi(x)$ を簡単な関数 $A_n\sin(n\pi x)$ の和の形に展開し，それからその各成分に対する応答 $A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$ を足して初期条件 $u(x,0) = \phi(x)$ に対応する解を得る．

3. 解

$$u(x,t) = A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x) + A_2 e^{-(2\pi\alpha)^2 t}\sin(2\pi x) + \cdots$$

の各項は x と t の関数である．この級数の先の方の項は

$$e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$$

という因子のために非常に速く小さくなることに注意せよ．したがって，長い間には，解は第1項に近似的に等しくなる：

$$u(x,t)\cong A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x)$$

また，この第1項は時間と共に減衰する正弦曲線の形をしている（図 5.5）．

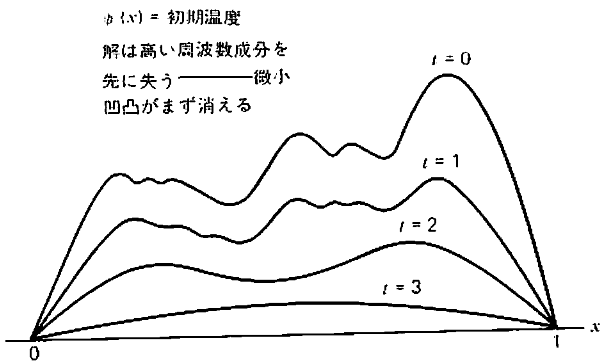


図 5.5　拡散問題では高次の項は速やかに減衰する

練習問題

1. A, B, λ を任意定数として，$u(x,t)=e^{-\lambda^2\alpha^2 t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)]$ が偏微分方程式 $u_t=\alpha^2 u_{xx}$ を満足することを示せ．

2. $$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(\pi n x)\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{1}{2} & (m=n)\end{cases}$$

 であることを示せ．

 ヒント　恒等式

 $$\sin(m\pi x)\sin(n\pi x)=\frac{1}{2}[\cos(m-n)\pi x-\cos(m+n)\pi x]$$

 を使え．

3. $\phi(x)=1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ の Fourier 正弦展開を求めよ．初めの3項あるいは4項の和の図を描け．

4. 練習問題3の結果を使うと，初期値・境界値問題

 偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1)$

 境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(1,t)=0\end{cases}$　$(0<t<\infty)$

 初期条件　$u(x,0)=1$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

 の解はどうなるか．（棒の両端の温度を1度から0度に瞬時に引き下げようというのであるから，この問題は物理的には不可能であることに注意せよ．たいていの問題において，境界条件が0なら，初期温度 $\phi(x)$ も $x=0$ と $x=1$ で0でなければならない．）

5. 練習問題4の初期条件を

 $$u(x,0)=\sin(2\pi x)+\frac{1}{3}\sin(4\pi x)+\frac{1}{5}\sin(6\pi x)$$

 に変えたら解はどうなるか．

6. 練習問題4の初期条件が

 $$u(x,0)=x-x^2\quad(0<x<1)$$

 なら解はどうなるか．

参考書

Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, 1973. 本書よりいくぶん程度の高い良く書かれた教科書である．第6章は変数分離に関する大きな章で良い問題をいくつも取り扱っている．